ÖMG-DMV-KONGRESS 2009

Zweistufige Türme von p-Klassenkörpern über algebraischen Zahlkörpern $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$ mit p-Klassengruppe vom Typ (p, p)

Präsentation
von
Daniel C. Mayer

§ **1.** Grundlegendes **Szenario:**

Die **Artin-Galois-Korrespondenz** $\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|\mathbb{K})$
für den ersten Hilbertschen p-Klassenkörper $\mathbb{K}_1$
über einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$
mit p-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}) = \mathrm{Syl}_p\mathrm{Cl}(\mathbb{K})$ vom Typ (p,p)

$\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ besitzt $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$ zyklische Untergruppen vom Typ (p). Nach dem Artinschen Reziprozitätsgesetz sind das die Normklassengruppen $\mathrm{N}_{N_i|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_i)$ der zugeordneten unverzweigten zyklischen Erweiterungen $N_i|\mathbb{K}$ vom Grad p.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 = \mathrm{N}_{\mathbb{K}_1|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}_1) & & & & \\
 & \diagup & & / & & \backslash & & \diagdown & \\
\mathrm{N}_{N_1|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_1) & & \mathrm{N}_{N_2|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_2) & & & & \cdots & & \mathrm{N}_{N_{p+1}|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_{p+1}) \\
 & \diagdown & & \backslash & & / & & \diagup & \\
 & & & & \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}) & & & &
\end{array}$$

<u>1. isotone **Artin**-Isomorphie</u> $\updownarrow$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|\mathbb{K}_1) & & & & \\
 & \diagup & & / & & \backslash & & \diagdown & \\
\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|N_1) & & \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|N_2) & & & & \cdots & & \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|N_{p+1}) \\
 & \diagdown & & \backslash & & / & & \diagup & \\
 & & & & \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|\mathbb{K}) & & & &
\end{array}$$

<u>2. antitone **Galois**-Korrespondenz</u> $\updownarrow$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{K}_1 & & & & \\
 & \diagup & & / & & \backslash & & \diagdown & \\
N_1 & & N_2 & & & & \cdots & & N_{p+1} \\
 & \diagdown & & \backslash & & / & & \diagup & \\
 & & & & \mathbb{K} & & & &
\end{array}$$

§ **2.** Erweitertes **Szenario:**

Der **große zweistufige Turm** $\mathbb{K} < \mathbb{K}_1 \leq \mathbb{K}_2$
bis zum zweiten Hilbertschen p-Klassenkörper $\mathbb{K}_2$
über einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$
mit p-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ vom Typ (p,p)

$\mathbb{K}_2 = (\mathbb{K}_1)_1$ heißt **zweiter Hilbertscher p-Klassenkörper** von $\mathbb{K}$,
ist eine Galois-Erweiterung von $\mathbb{K}$.

Automorphismengruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$
des **großen zweistufigen Turmes** $\mathbb{K} < \mathbb{K}_1 \leq \mathbb{K}_2$:

- (zweistufig) metabelsche p-Gruppe
- mit abelscher Kommutatorgruppe $\mathbb{G}' = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_1) \simeq \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}_1)$
- Kommutatorfaktorgruppe $\mathbb{G}/\mathbb{G}' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ vom Typ (p,p)
- enthält $p+1$ maximale Normalteiler $\mathbb{M}_i = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|N_i)$ $(1 \leq i \leq p+1)$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{K}_2 & & 1 = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_2) & & \\
| & & | & & \\
(N_i)_1 & & \mathbb{M}_i' = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|(N_i)_1) & & \\
| & & | & & \\
\mathbb{K}_1 & \longleftrightarrow & \mathbb{G}' = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_1) \simeq \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}_1) & & \\
| & & | & & \\
N_i & & \mathbb{M}_i = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|N_i) & \longrightarrow & \mathbb{M}_i/\mathbb{M}_i' \simeq \mathrm{Gal}((N_i)_1|N_i) \simeq \mathrm{Cl}_p(N_i) \\
| & & | & & \\
\mathbb{K} & & \mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{G}/\mathbb{G}' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})
\end{array}$$

Wie jede endliche p-Gruppe ist $\mathbb{G}$ nilpotent.

Absteigende Zentralreihe von $\mathbb{G}$:

- $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}$ und $\mathbb{G}_{i+1} = [\mathbb{G}_i, \mathbb{G}]$ für $i \geq 1$
- $\mathbb{G}_1 > \mathbb{G}_2 > \ldots > \mathbb{G}_{m-1} > \mathbb{G}_m = 1$ für einen Index $m \geq 2$
- **Klasse von** $\mathbb{G}$: $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = m-1$ (Anzahl nicht-trivialer Faktoren $\mathbb{G}_i/\mathbb{G}_{i+1}$)

$\mathbb{G}$ ist von **maximaler Klasse** $\Longleftrightarrow |\mathbb{G}| = p^m$.
Dann ist $\mathbb{G}_i/\mathbb{G}_{i+1}$ zyklisch von der Ordnung p für $2 \leq i \leq m-1$.

§ **3.** Andere erweiterte **Szenarien:**

Die $p+1$ **kleinen unteren zweistufigen Türme** $\mathbb{K} < \mathbb{K}_1 \le (N_i)_1$
jeweils bis zum ersten Hilbertschen p-Klassenkörper $(N_i)_1$
der i-ten unverzweigt zyklischen Erweiterung N_i $(1 \le i \le p+1)$
über einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$
mit p-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ vom Typ (p,p)

$(N_i)_1$ ist eine Galois-Erweiterung von $\mathbb{K}$.

Automorphismengruppe $\Gamma_i = \mathrm{Gal}((N_i)_1|\mathbb{K})$
des i-ten **kleinen unteren zweistufigen Turmes** $\mathbb{K} < \mathbb{K}_1 \le (N_i)_1$:

- enthält abelschen maximalen Normalteiler $\mathbb{A}_i = \mathrm{Gal}((N_i)_1|N_i) \simeq \mathrm{Cl}_p(N_i)$
- (zweistufig) metabelsche p-Gruppe
- mit abelscher Kommutatorgruppe $\Gamma_i' = \mathrm{Gal}((N_i)_1|\mathbb{K}_1) < \mathbb{A}_i$
- Kommutatorfaktorgruppe $\Gamma_i/\Gamma_i' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ vom Typ (p,p)

$$
\begin{tikzcd}
(N_i)_1 \arrow[d, dash] & 1 = \mathrm{Gal}((N_i)_1|(N_i)_1) \arrow[d, dash] & \\
\mathbb{K}_1 \arrow[d, dash] \arrow[r, leftrightarrow] & \Gamma_i' = \mathrm{Gal}((N_i)_1|\mathbb{K}_1) \arrow[d, dash] & \\
N_i \arrow[d, dash] & \mathbb{A}_i = \mathrm{Gal}((N_i)_1|N_i) \simeq \mathrm{Cl}_p(N_i) \arrow[d, dash] & \\
\mathbb{K} & \Gamma_i = \mathrm{Gal}((N_i)_1|\mathbb{K}) \arrow[r] & \Gamma_i/\Gamma_i' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})
\end{tikzcd}
$$

$\Gamma_i = \mathrm{Gal}((N_i)_1|\mathbb{K})$ ist **Vorgänger** von $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$
$\Longleftrightarrow \mathbb{M}_i' = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|(N_i)_1)$ ist Normalteiler von $\mathbb{G}$
$\Longleftrightarrow \mathbb{M}_i' = \mathbb{G}_j$ für einen Index $3 \le j \le m$
$\Longleftrightarrow \Gamma_i = \mathbb{G}/\mathbb{G}_j = \mathbb{G}/\mathbb{M}_i' = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})/\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|(N_i)_1)$

Unabhängig davon ist stets
$\mathbb{A}_i = \mathrm{Gal}((N_i)_1|N_i) \simeq \mathbb{M}_i/\mathbb{M}_i'$ und $\Gamma_i' = \mathrm{Gal}((N_i)_1|\mathbb{K}_1) \simeq \mathbb{G}'/\mathbb{M}_i'$.

§ 4. Die **Arten der Kapitulation** von Idealklassen aus $\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ in $\mathrm{Cl}_p(N_i)$ $(1 \le i \le p+1)$ für einen Grundkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$ mit p-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ vom Typ (p,p)

Für den Kern $\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}}$ des Klassenerweiterungs-Homomorphismus
$\mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}} : \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Cl}_p(N_i)$, $\mathfrak{a}\mathcal{P}_{\mathbb{K}} \mapsto (\mathfrak{a}\mathcal{O}_{N_i})\mathcal{P}_{N_i}$
gibt es $p+2$ Möglichkeiten
$\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}} = \mathrm{N}_{N_j|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_j)$ mit $1 \le j \le p+1$ oder $\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}} = \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$.
Wegen Hilberts Satz 94 ist nämlich $j_{N_i|\mathbb{K}}$ nicht injektiv.

Singulette von Kapitulationsarten für eine einzelne Erweiterung $N_i|\mathbb{K}$:

- **Totale** (vollständige, 2-dimensionale) Kapitulation:
  $\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}} = \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$, Symbol: $\kappa(i) = 0$.
- **Partielle** (teilweise, 1-dimensionale) Kapitulation:
  $\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}} = \mathrm{N}_{N_j|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_j)$ mit $1 \le j \le p+1$, Symbol: $\kappa(i) = j$.

Weitere Unterscheidung bei partieller Kapitulation:

(A) Tausskys Bedingung (A) oder **Fixpunkt**-Kapitulation:
$\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}} \cap \mathrm{N}_{N_i|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_i) \neq 1$, weil $\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}} = \mathrm{N}_{N_i|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_i)$ mit $\kappa(i) = i$

(B) Tausskys Bedingung (B):
$\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}} \cap \mathrm{N}_{N_i|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_i) = 1$, weil $\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}} = \mathrm{N}_{N_j|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_j)$ mit $\kappa(i) = j \neq i$

Multiplette von Kapitulationsarten für die Gesamtheit aller Erweiterungen $N_i|\mathbb{K}$ $(1 \le i \le p+1)$:
$\kappa = (\kappa(1), \ldots, \kappa(p+1)) \in [0, p+1]^{p+1}$

Zusammenhang zwischen Kapitulation und **Verlagerung** (Transfer):

$$
\begin{array}{rccc}
 & \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}}} & \mathrm{Cl}_p(N_i) \\
\text{Artin-Isomorphie} & \updownarrow & & \updownarrow \\
 & \mathbb{G}/\mathbb{G}' & \xrightarrow[V_{\mathbb{G},\mathbb{M}_i} = V(i)]{} & \mathbb{M}_i/\mathbb{M}_i'
\end{array}
$$

Damit wird $\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}} \simeq \ker V_{\mathbb{G},\mathbb{M}_i}$, wobei $\mathrm{N}_{N_j|\mathbb{K}}\mathrm{Cl}_p(N_j) \simeq \mathbb{M}_j/\mathbb{G}'$.

§ **5.** Ausständige **Erweiterungen** bisheriger Ergebnisse
über die zweistufig metabelsche p-Gruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$

[1] **A. Scholz und O. Taussky**, Die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginär quadratischer Zahlkörper, *J. reine angew. Math.* **171** (1934), 19–41.

- Struktur der Kommutatorgruppe $\mathbb{G}' \simeq \mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}_1)$
- Reell quadratische Grundkörper $\mathbb{K}$ mit 2-dimensionaler Kapitulation
- Relationen für Erzeugende und Isomorphieklasse von $\mathbb{G}$

[2] **F.-P. Heider und B. Schmithals**, Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen, *J. reine angew. Math.* **336** (1982), 1–25.

- Zusammenhang mit der symbolischen Ordnung des Hauptkommutators

[3] **J. R. Brink**, The class field tower for imaginary quadratic number fields of type $(3, 3)$, Dissertation, Ohio State Univ., 1984.

- Kriterium für Ordnung und Klasse von $\mathbb{G}$
- Reell quadratische Grundkörper $\mathbb{K}$ mit 2-dimensionaler Kapitulation

[4] **J. R. Brink and R. Gold**, Class field towers of imaginary quadratic fields, *manuscripta math.* **57** (1987), 425–450.

- Endgültige Entscheidung zwischen 2- oder 3-Stufigkeit des Turmes

[5] **B. Nebelung**, Klassifikation metabelscher 3-Gruppen mit Faktorkommutatorgruppe vom Typ $(3, 3)$ und Anwendung auf das Kapitulationsproblem, Inauguraldissertation, Univ. zu Köln, 1989.

- Kriterium für Ordnung und Klasse von $\mathbb{G}$
- Zusammenhang mit der symbolischen Ordnung des Hauptkommutators

[6] **D. C. Mayer**, Principalization in complex S_3-fields, *Congressus Numerantium* **80** (1991), 73–87.

- Reell quadratische Grundkörper $\mathbb{K}$ mit 2-dimensionaler Kapitulation

§ **6. Absteigende Zentralreihe** der Galoisgruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ des zweiten Hilbertschen 3-Klassenkörpers $\mathbb{K}_2$ über einem Grundkörper $\mathbb{K}$ mit 3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3,3)$

Isomorphie-**Invariante**: $e+1 = \min\{3 \le i \le m \quad | \quad 1 \le |\mathbb{G}_i/\mathbb{G}_{i+1}| \le 3\}$,
für $e \ge 3$ auch $e = \max\{3 \le i \le m-1 \quad | \quad |\mathbb{G}_i/\mathbb{G}_{i+1}| = 9\}$,
allgemein $e = n - m + 2$, wenn $|\mathbb{G}| = 3^n$, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = m-1$, $n \ge m \ge 3$.
(B. Nebelung, 1989)

triviale Untergruppe	$\mathbb{G}_m = 1 = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|\mathbb{K}_2)$
	$\vert$
$m-e-1$ zyklische Faktoren vom Typ (3)	$\mathbb{G}_{m-1}$
	$\vert$
	$\vdots$
	$\vert$
	$\mathbb{G}_{e+2}$
	$\vert$
	$\mathbb{G}_{e+1}$
	$\Vert$
$e-2$ bizyklische Faktoren vom Typ (3,3)	$\mathbb{G}_e$
	$\Vert$
	$\vdots$
	$\Vert$
	$\mathbb{G}_4$
	$\Vert$
	$\mathbb{G}_3$
	$\vert$
Kommutator−gruppe	$\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}' = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|\mathbb{K}_1)$
maximale Normalteiler	$\mathbb{M}_1 \quad \mathbb{M}_2 \quad = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|N_i)_{(1\le i\le 4)} \quad \mathbb{M}_3 \quad \mathbb{M}_4$
metabelsche 3−Gruppe	$\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|\mathbb{K})$

§ 7. **Zentralreihen** einer metabelschen 3-Gruppe $\mathbb{G}$ von **maximaler** Klasse

$\mathbb{G}$ metabelsche 3-Gruppe von maximaler Klasse,
$|\mathbb{G}| = 3^n$, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = m - 1$, $n = m \geq 3$,
also $e = 2$ und $\mathbb{G}_i/\mathbb{G}_{i+1}$ zyklisch von der Ordnung 3 für $2 \leq i \leq m - 1$.

Die Glieder der ab- und aufsteigenden Zentralreihe stimmen vollständig überein, bis auf die gegenläufige Nummerierung $\quad \mathbb{G}_i = Z_{m-i} \quad$ für $1 \leq i \leq m$.

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{triviale Untergruppe} & & \mathbb{G}_m = Z_0 = 1 & & \\
 & & | & & \\
 & & \mathbb{G}_{m-1} = Z_1 = \langle s_{m-1} \rangle & & \\
m-3 & & | & & \\
\text{zyklische Faktoren} & & \vdots & & \\
 & & | & & \\
\text{vom Typ } (3) & & \mathbb{G}_4 = Z_{m-4} = \langle s_4, s_5 \rangle & & \\
 & & | & & \\
 & & \mathbb{G}_3 = Z_{m-3} = \langle s_3, s_4 \rangle & & \\
 & & | & & \\
\text{Kommutator}-\text{gruppe} & & \mathbb{G}_2 = Z_{m-2} = \mathbb{G}' = \langle s_2, s_3 \rangle & & \\
 & / \quad / & & \backslash \quad \backslash & \\
\text{maximale Normalteiler} & \mathbb{M}_1 = \langle y, \mathbb{G}' \rangle \quad \mathbb{M}_2 = \langle x, \mathbb{G}' \rangle & & \mathbb{M}_3 = \langle xy, \mathbb{G}' \rangle \quad \mathbb{M}_4 = \langle xy^{-1}, \mathbb{G}' \rangle & \\
 & \backslash \quad \backslash & & / \quad / & \\
\text{metabelsche } 3-\text{Gruppe} & & \mathbb{G}_1 = Z_{m-1} = \mathbb{G} = \langle x, y \rangle & &
\end{array}
$$

Kommutatorfaktorgruppe $\mathbb{G}/\mathbb{G}'$ vom Typ $(3,3) \Longrightarrow \mathbb{G}^3 < \mathbb{G}' \Longrightarrow$
Frattini-Untergruppe $\Phi(\mathbb{G}) = \cap_{j=1}^{4} \mathbb{M}_j = \mathbb{G}'\mathbb{G}^3$ stimmt mit $\mathbb{G}'$ überein $\Longrightarrow$
Basissatz von Burnside: $\mathbb{G}$ wird von zwei Elementen x, y erzeugt.

Hauptkommutator: $s_2 = [y, x] \in \mathbb{G}_2$,
höhere Kommutatoren: $s_{i+1} = [s_i, x] \in \mathbb{G}_{i+1}$ für $i \geq 2$.

§ **8. Charakteristische Untergruppen** zwischen $\mathbb{G}$ und $\mathbb{G}'$
bei einer metabelschen p-Gruppe $\mathbb{G}$ mit $\mathbb{G}/\mathbb{G}'$ vom Typ (p,p)

Für $i \geq 1$ sei $\mathbb{G}_{i+2} < C_i < \mathbb{G}$ mit $C_i/\mathbb{G}_{i+2} = \mathrm{C}_{\mathbb{G}/\mathbb{G}_{i+2}}(\mathbb{G}_i/\mathbb{G}_{i+2})$,
also $C_i = \{g \in \mathbb{G} \quad | \quad [g,u] \in \mathbb{G}_{i+2} \text{ für } u \in \mathbb{G}_i\}$ und somit $[C_i, \mathbb{G}_i] \leq \mathbb{G}_{i+2}$.
(N. Blackburn, 1956)

Isomorphie-**Invariante**: $s = \min\{1 \leq i \leq m-1 \quad | \quad C_i > \mathbb{G}'\}$
(B. Nebelung, 1989)

Satz 8. (B. Nebelung, 1989)
$C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_{m-1}$ ist eine aufsteigende Kette
charakteristischer Untergruppen von $\mathbb{G}$.
• Entweder $s = m-1$ und kein C_i liegt zwischen $\mathbb{G}$ und $\mathbb{G}'$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{G} = C_{m-1} & & \\ & / & & \backslash & \\ \mathbb{M}_1 & & \ldots & & \mathbb{M}_{p+1} \\ & \backslash & & / & \\ & & \mathbb{G}' = C_1 = \ldots = C_{m-2} & & \end{array}$$

• oder $s \leq m-2$ und $C_s = \ldots = C_{m-2}$
stimmen mit einem der maximalen Normalteiler, o.E. mit $\mathbb{M}_1$, überein

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{G} = C_{m-1} & & \\ & / & & \backslash & \\ \mathbb{M}_1 = C_s = \ldots = C_{m-2} & & \ldots & & \mathbb{M}_{p+1} \\ & \backslash & & / & \\ & & \mathbb{G}' = C_1 = \ldots = C_{s-1} & & \end{array}$$

---

p-Gruppen **maximaler** Klasse $e = 2$, $n = m$ haben $s = 2$,
also $s \leq m-2$ für $m \geq 4$, aber $s = m-1$ für $m = 3$.

3-Gruppen **minimaler** Klasse $e = m-1$, $n = 2m-3$ haben $s = m-1$.
3-Gruppen **fast-minimaler** Klasse $e = m-2$, $n = 2m-4$ haben
entweder $s = m-1 = e+1$ oder $s = m-2 = e$.
3-Gruppen von **höherer** als fast-minimaler Klasse $e \leq m-3$, $n = m+e-2$ haben $s = e$.

§ 9. **Aufsteigende Zentralreihe** der Galoisgruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ des zweiten Hilbertschen 3-Klassenkörpers $\mathbb{K}_2$ über einem Grundkörper $\mathbb{K}$ mit 3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3,3)$

Das Zentrum $Z_1 = Z(\mathbb{G})$ ist bizyklisch, wenn $e \geq 3$ mit $[C_s, \mathbb{G}_e] = 1$, und zyklisch, wenn entweder $e = 2$ oder $e \geq 3$ mit $[C_s, \mathbb{G}_e] = \mathbb{G}_{m-1}$.

triviale Untergruppe	$Z_0 = 1 = \mathbb{G}_m$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|\mathbb{K}_2)$
	$\|\|$ bzw. $\|$
Zentrum	$Z_1 = Z(\mathbb{G})$
	$\|\|$
$e-2$	Z_2
bizyklische	$\|\|$
Faktoren	$\vdots$
vom Typ (3,3)	$\|\|$
	Z_{e-2} bzw. Z_{e-1}
	$\|$
$m-e-1$ bzw. $m-e-2$	Z_{e-1} bzw. Z_e
zyklische	$\|$
Faktoren	$\vdots$
vom Typ (3)	$\|$
	Z_{m-4}
	$\|$
	$Z_{m-3} = \mathbb{G}_3$
	$\|$
Kommutator−gruppe	$Z_{m-2} = \mathbb{G}_2$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|\mathbb{K}_1)$
	$/ \quad / \qquad \qquad \backslash \quad \backslash$
maximale Normalteiler	$\mathbb{M}_1 \quad \mathbb{M}_2 \qquad \mathbb{M}_3 \quad \mathbb{M}_4$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|N_i)_{(1\leq i\leq 4)}$
	$\backslash \quad \backslash \qquad \qquad / \quad /$
metabelsche 3−Gruppe	$Z_{m-1} = \mathbb{G}_1$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|\mathbb{K})$

§ 10. **Relationen** für die Erzeugenden x, y einer metabelschen p-Gruppe $\mathbb{G} = \langle x, y \rangle$ von **maximaler** Klasse

Satz 10. (N. Blackburn, 1958)
p rationale Primzahl, $\mathbb{G}$ metabelsche p-Gruppe, $|\mathbb{G}| = p^m$, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = m - 1$, $m \geq 3$.
Dann ist $\mathbb{G}/\mathbb{G}'$ vom Typ (p, p).

Erzeugende: $y \in C_2 \setminus Z_{m-2}$, $x \in \mathbb{G} \setminus (C_2 \cup \mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G}_{m-2}))$, falls $m \geq 4$.
Glieder der absteigenden Zentralreihe: Hauptkommutator $s_2 = [y, x] \in \mathbb{G}_2$, höhere Kommutatoren $s_{i+1} = [s_i, x] \in \mathbb{G}_{i+1}$ für $i \geq 2$.

Relationen von **Blackburn** mit $0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq p - 1$:

1. Vertauschungsrelationen mit x:

$$[y, x] = s_2$$
$$[s_i, x] = s_{i+1} \text{ für } i \geq 2$$

2. Nilpotenzrelation:

$$s_i = 1 \text{ für } i \geq m$$

3. Vertauschungsrelationen mit y für den Fall, dass $[C_2, \mathbb{G}'] \leq \mathbb{G}_{m-2}$:

$$[s_2, y] = s_{m-2}^{-\alpha} s_{m-1}^{-\beta}$$
$$[s_3, y] = s_{m-1}^{-\alpha}$$
$$[s_i, y] = 1 \text{ für } i \geq 4$$

4. Relationen für p-te Potenzen:

$$s_i^p \prod_{j=1}^{p-1} s_{i+j}^{\binom{p}{j+1}} = 1 \text{ für } i \geq 2$$
$$y^p \prod_{j=1}^{p-1} s_{1+j}^{\binom{p}{j+1}} = s_{m-1}^{\gamma}$$
$$x^p = s_{m-1}^{\delta}$$

5. Vertauschbarkeit in der abelschen Kommutatorgruppe $\mathbb{G}_2$:

$$[s_i, s_j] = 1 \text{ für } i, j \geq 2$$
$$[s_2, x^p] = 1$$
$$[s_2, y^p] = 1$$

Symbol für die Isomorphieklasse: $\mathbb{G} \simeq \mathbb{G}_{\alpha,\beta}^{(m)}(\gamma, \delta) \in \mathrm{CF}(m, m; p)$.

§ **11.** Bestimmung der **symbolischen Ordnung** $\mathfrak{Y} \lhd \mathbb{Z}[X,Y]$
des Hauptkommutators $s_2 = [y,x]$
einer metabelschen p-Gruppe $\mathbb{G} = \langle x,y\rangle$ von **maximaler** Klasse
aus Relationen für die Erzeugenden x,y

Die Kommutatorgruppe $\mathbb{G}'$ ist ein zyklischer $\mathbb{G}$-Modul (Furtwängler, 1929),
wird also durch die symbolischen Potenzen $s_2^{f(x,y)}$ mit $f(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ erzeugt.
Der Kern $\mathfrak{M} \lhd \mathbb{Z}[X,Y]$ des Einsetzungs-Epimorphismus
$\mathbb{Z}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{G}'$, $f(X,Y) \mapsto s_2^{f(x,y)}$ ist ein Ideal des Polynomrings $\mathbb{Z}[X,Y]$
und heißt **symbolische Ordnung** oder **Annihilator** von s_2.
Also ist die dem Restklassenring $\mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{M}$ zugrundeliegende additive abelsche Gruppe isomorph zur (multiplikativen) Kommutatorgruppe $\mathbb{G}'$.

Satz 11. (D. C. Mayer, 2009)
p rationale Primzahl, $\mathbb{G}$ metabelsche p-Gruppe, $|\mathbb{G}| = p^m$, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = m-1$, $m \geq 3$.
Dann ist $\mathbb{G}/\mathbb{G}'$ vom Typ (p,p).
Erzeugende: $y \in C_2 \setminus Z_{m-2}$, $x \in \mathbb{G} \setminus (C_2 \cup \mathrm{C}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G}_{m-2}))$, falls $m \geq 4$.
Die symbolische Ordnung von $s_2 = [y,x] \in \mathbb{G}_2$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{Y}_{m-2} = \begin{cases} (X^{m-2}, Y, \mathrm{S}_p(x)) & \text{für } [C_2,\mathbb{G}'] = 1 \\ (X^{m-2}, bX^{m-3}+Y, \mathrm{S}_p(x)) & \text{für } [C_2,\mathbb{G}'] = \mathbb{G}_{m-1},\ m \geq 5,\ p \geq 3 \\ (X^{m-2}, P_1, P_2, \mathrm{S}_p(x)) & \text{für } [C_2,\mathbb{G}'] = \mathbb{G}_{m-2},\ m \geq 6,\ p \geq 5 \end{cases}$$

wobei $P_1 = aX^{m-3} + XY$, $P_2 = bX^{m-3} + aX^{m-4} + Y$ mit $0 \leq a,b \leq p-1$
und $X = x-1$, $Y = y-1$, $\mathrm{S}_p(x) = \sum_{i=1}^{p} x^{i-1} = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} X^{i-1}$.

Im Fall $[C_2,\mathbb{G}'] = \mathbb{G}_{m-1}$, $m \geq 5$,
sind mit $bX^{m-3}+Y$ auch $bX^{m-2}+XY$, $bX^{m-3}Y + Y^2$ und XY, Y^2 in $\mathfrak{Y}_{m-2}$.

Im Fall $[C_2,\mathbb{G}'] = \mathbb{G}_{m-2}$, $m \geq 6$,
ist mit $aX^{m-3}+XY$ auch $aX^{m-2}+X^2Y$ und X^2Y in $\mathfrak{Y}_{m-2}$,
und mit $bX^{m-3}+aX^{m-4}+Y$ auch $bX^{m-3}Y + aX^{m-4}Y + Y^2$ und Y^2 in $\mathfrak{Y}_{m-2}$.

§ **12.** Bestimmung einer **Basis** und der **Struktur** der additiven abelschen Gruppe, die dem **Restklassenring** $\mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{Y}$ zugrundeliegt

Satz 12. (D. C. Mayer, 2009)
Es sei $\mathfrak{Y}_\alpha$ das Ideal $(X^\alpha, aX^{\alpha-1}+XY, bX^{\alpha-1}+aX^{\alpha-2}+Y, \mathrm{S}_p(x))$ mit $\alpha \geq 1$.
Die folgenden Aussagen gelten unabhängig von den Parametern $0 \leq a, b \leq p-1$.

1. Eine Basis für die dem Restklassenring $\mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{Y}_\alpha$ zugrundeliegende additive abelsche Gruppe ist gegeben durch
$(1, X, X^2, \dots, X^{\alpha-1})$, falls $\alpha \leq p-1$, und
$(1, X, X^2, \dots, X^{p-2})$, falls $\alpha \geq p$.

2. Hat $0 \leq i \leq \alpha$ die eindeutige Darstellung $i = q(p-1)+r$ mit $q \geq 0$ und $0 \leq r \leq p-2$, so ist die Ordnung der Potenz von X mit Exponent $\alpha - i$ gegeben durch

$$\mathrm{ord}(X^{\alpha-i}) = \begin{cases} p^q = p^{\frac{i}{p-1}} & \text{für } r=0 \\ p^{q+1} = p^{\frac{i-r+p-1}{p-1}} & \text{für } r \geq 1 \end{cases}$$

3. Hat α die eindeutige Darstellung $\alpha = q(p-1)+r$ mit $q \geq 0$ und $0 \leq r \leq p-2$, so besitzt die dem Restklassenring $\mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{Y}_\alpha$ zugrundeliegende additive abelsche Gruppe die Struktur

a) einer *elementar* abelschen p-Gruppe vom Typ

$$(\underbrace{p,\dots,p}_{\alpha \text{ mal}})$$

für (bzgl. p kleine) Werte $\alpha \leq p-1$,

b) einer (nicht elementaren) *homogenen* abelschen p-Gruppe vom Typ

$$(\underbrace{p^q,\dots,p^q}_{(p-1) \text{ mal}})$$

für (bzgl. p große) Werte $\alpha \geq p$ mit $r = 0$,

c) einer *fast homogenen* abelschen p-Gruppe vom Typ

$$(\underbrace{p^{q+1},\dots,p^{q+1}}_{r \text{ mal}}, \underbrace{p^q,\dots,p^q}_{(p-1-r) \text{ mal}})$$

für $\alpha \geq p$ mit $r \geq 1$.

Im Fall $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ ist damit auch die Struktur der p-Klassengruppe des ersten Hilbertschen p-Klassenkörpers $\mathbb{K}_1$ von $\mathbb{K}$ bekannt:
$\mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{Y} \simeq \mathbb{G}' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_1) \simeq \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}_1)$.

§ **13.** Bestimmung der p-**Klassenzahlen** $\mathrm{h}_p(N_1),\ldots,\mathrm{h}_p(N_{p+1})$ der $p+1$ unverzweigten zyklischen Erweiterungen vom Grad p über einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$ mit p-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ vom Typ (p,p) aus der Ordnung und Klasse der metabelschen p-Gruppe $\mathbb{G}=\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ im Fall von **maximaler** Klasse

Satz 13. (D. C. Mayer, 2005 für $p=3$, 2009 für $p\geq 5$)

Es sei $\mathbb{G}=\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ mit $|\mathbb{G}|=p^n$, $\mathrm{cl}(\mathbb{G})=m-1$, $n=m\geq 3$.
Erzeugende: $\mathbb{G}=\langle x,y\rangle$
mit $x\in\mathbb{G}\setminus C_2$, falls $m\geq 4$, und $y\in C_2\setminus Z_{m-2}$, wobei $Z_{m-2}=\mathbb{G}'$ für $p=3$.
Maximale Normalteiler $\mathbb{M}_i=\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|N_i)$ mit folgender Nummerierung:
$\mathbb{M}_1=\langle y,\mathbb{G}'\rangle(=C_2)$, $\mathbb{M}_2=\langle x,\mathbb{G}'\rangle$, $\mathbb{M}_3=\langle xy,\mathbb{G}'\rangle$, …, $\mathbb{M}_{p+1}=\langle xy^{p-1},\mathbb{G}'\rangle$.

1. Die Kommutatorgruppen der maximalen Normalteiler $\mathbb{M}_1,\ldots,\mathbb{M}_{p+1}$ sind

$$\mathbb{M}_1'=\begin{cases}1, & \text{falls } [C_2,\mathbb{G}']=1,\\ \mathbb{G}_{m-1}, & \text{falls } [C_2,\mathbb{G}']=\mathbb{G}_{m-1},\ m\geq 5,\ p\geq 3,\\ \mathbb{G}_{m-2}, & \text{falls } [C_2,\mathbb{G}']=\mathbb{G}_{m-2},\ m\geq 6,\ p\geq 5,\end{cases}$$
$$\mathbb{M}_i'=\mathbb{G}_3 \text{ für } 2\leq i\leq p+1.$$

$\mathbb{M}_1$ ist genau dann abelscher Normalteiler von $\mathbb{G}$, wenn $[C_2,\mathbb{G}']=1$.
Die $\mathbb{M}_i$ mit $2\leq i\leq p+1$ sind genau dann abelsche Normalteiler von $\mathbb{G}$, wenn $m=3$.

2. Die p-Klassenzahlen von $N_1,\ldots,N_{p+1}$ sind gegeben durch

$$\mathrm{h}_p(N_1)=\begin{cases}p^{m-1}, & \text{falls } [C_2,\mathbb{G}']=1,\\ p^{m-2}, & \text{falls } [C_2,\mathbb{G}']=\mathbb{G}_{m-1},\ m\geq 5,\ p\geq 3,\\ p^{m-3}, & \text{falls } [C_2,\mathbb{G}']=\mathbb{G}_{m-2},\ m\geq 6,\ p\geq 5,\end{cases}$$
$$\mathrm{h}_p(N_i)=p^2 \text{ für } 2\leq i\leq p+1.$$

§ **14.** Bestimmung der p-**Kapitulation** $\ker \mathrm{j}_{N_i|\mathbb{K}}$ in den $p+1$ unverzweigten zyklischen Erweiterungen N_i vom Grad p über einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ vom Typ (p,p) aus den Verlagerungskernen $\ker V_{\mathbb{G},\mathbb{M}_i}$ der metabelschen p-Gruppe $\mathbb{G}=\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ im Fall von **maximaler** Klasse

Satz 14. (B. Nebelung, 1989 für $p=3$; D. C. Mayer, 2009 für $p\ge 5$)
Es sei $\mathbb{G}=\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$, $|\mathbb{G}|=p^n$, $\mathrm{cl}(\mathbb{G})=m-1$, $n=m\ge 3$, $\mathbb{G}=\langle x,y\rangle$ mit $x\in\mathbb{G}\setminus C_2$, falls $m\ge 4$, und $y\in C_2\setminus Z_{m-2}$, wobei $Z_{m-2}=\mathbb{G}'$ für $p=3$.
Im Fall $m=3$ mit der extraspeziellen p-Gruppe $\mathbb{G}\simeq\mathbb{G}^{(3)}_{0,0}(0\quad 1)\in\mathrm{CF}(3,3;p)$ vom Exponenten p^2 sei y von der Ordnung p.
Maximale Normalteiler $\mathbb{M}_i=\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|N_i)$ mit folgender Nummerierung:
$\mathbb{M}_1=\langle y,\mathbb{G}'\rangle(=C_2)$, $\mathbb{M}_2=\langle x,\mathbb{G}'\rangle$, $\mathbb{M}_3=\langle xy,\mathbb{G}'\rangle$, …, $\mathbb{M}_{p+1}=\langle xy^{p-1},\mathbb{G}'\rangle$.
Höhere Kommutatoren: $s_2=[y,x]\in\mathbb{G}_2$, $s_{i+1}=[s_i,x]\in\mathbb{G}_{i+1}$ für $i\ge 2$.
Relationen: $y^p\prod_{j=1}^{p-1}s_{1+j}^{\binom{p}{j+1}}=s_{m-1}^{\gamma}$, $x^p=s_{m-1}^{\delta}$ mit $0\le\gamma,\delta\le p-1$.

1. Die Werte der Verlagerungen $V_{\mathbb{G},\mathbb{M}_i}:\mathbb{G}/\mathbb{G}'\longrightarrow\mathbb{M}_i/\mathbb{M}_i'$ $(1\le i\le p+1)$ für $g\in\mathbb{G}$, $g\mathbb{G}'=x^ky^\ell\mathbb{G}'$, $0\le k,\ell\le p-1$, sind gegeben durch

$$V_{\mathbb{G},\mathbb{M}_1}(x^ky^\ell\mathbb{G}')=\begin{cases}s_{m-1}^{\delta k+\gamma\ell}\cdot 1, & \text{falls } [C_2,\mathbb{G}']=1,\\ 1\cdot\mathbb{G}_{m-1}, & \text{falls } [C_2,\mathbb{G}']=\mathbb{G}_{m-1},\ m\ge 5,\ p\ge 3,\\ 1\cdot\mathbb{G}_{m-2}, & \text{falls } [C_2,\mathbb{G}']=\mathbb{G}_{m-2},\ m\ge 6,\ p\ge 5,\end{cases}$$

$$V_{\mathbb{G},\mathbb{M}_i}(x^ky^\ell\mathbb{G}')=\begin{cases}s_{m-1}^{\delta k+\gamma\ell}\cdot 1, & \text{falls } m=3,\\ 1\cdot\mathbb{G}_3, & \text{falls } m\ge 4,\end{cases}\quad\text{für } 2\le i\le p+1.$$

2. Das Multiplett $(\kappa(1),\dots,\kappa(p+1))$ der Kapitulationsarten in $N_1,\dots,N_{p+1}$ ist gegeben durch

$$\kappa(1)=\begin{cases}2, & \text{falls } m\ge 4,\ \mathbb{G}\simeq\mathbb{G}^{(m)}_{0,0}(\gamma\quad 0)\in\mathrm{CF}(m,m;p),\ \gamma\ne 0,\\ 1, & \text{falls } m\ge 3,\ \mathbb{G}\simeq\mathbb{G}^{(m)}_{0,0}(0\quad 1)\in\mathrm{CF}(m,m;p),\\ 0, & \text{falls } m\ge 3,\ \mathbb{G}\simeq\mathbb{G}^{(m)}_{0,0}(0\quad 0)\in\mathrm{CF}(m,m;p),\\ 0, & \text{falls } [C_2,\mathbb{G}']\ne 1,\ m\ge 5,\ p\ge 3,\end{cases}$$

$$\kappa(i)=\begin{cases}1, & \text{falls } m=3,\ \mathbb{G}\simeq\mathbb{G}^{(3)}_{0,0}(0\quad 1)\in\mathrm{CF}(3,3;p),\\ 0, & \text{falls } m=3,\ \mathbb{G}\simeq\mathbb{G}^{(3)}_{0,0}(0\quad 0)\in\mathrm{CF}(3,3;p),\\ 0, & \text{falls } m\ge 4,\end{cases}\quad\text{für } 2\le i\le p+1.$$

§ **15. Verfeinerte Klassifikation** der Zahlkörper $L|\mathbb{Q}$
von Primzahlgrad $p \geq 3$ mit zyklischem oder diedralem Normalkörper N
nach den **ambigen Hauptidealen** (Differenten-Hauptfaktorisierungen)
von N bezüglich $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_N})$ (D. C. Mayer, 1990)

Signatur (r_1, r_2) von L	Einh.-Rang von K ohne Torsion r	z	mit Torsion $r+z$	Einh.-Norm-index u	$1+u$	kanonische Invarianten a	b	c	Art der Haupt-faktorisierung
zyklisch	0	0	0	0	1	1	0	0	ζ
$(p, 0)$ total reell	1	0	1	1	2	0	0	2	α_1
						0	1	1	α_2
						0	2	0	α_3
						1	0	1	β_1
						1	1	0	β_2
						2	0	0	γ_1
				0	1	0	0	1	δ_1
						0	1	0	δ_2
						1	0	0	ε_1
(nur für $p = 3$)	0	1	1	1	2	1	1	0	α
						2	0	0	β
rein kubisch				0	1	1	0	0	γ
$(1, \frac{p-1}{2})$ komplex	0	0	0	0	1	0	0	1	α'_1
						0	1	0	α'_2
						1	0	0	β'

Dabei bedeuten mit $G = \langle\sigma\rangle = \mathrm{Gal}(N|K)$ und $D = \mathrm{Gal}(N|\mathbb{Q})$ die p-Potenzen
$p^u = |\mathrm{H}^0(G, U_N)| = (U_K : N_{N|K}U_N)$ den Einheiten-Normindex,
$p^a = (\mathcal{P}_L^D : \mathcal{P}_\mathbb{Q})$ die Ordnung der Gruppe der absolut ambigen Hauptideale,
$p^b = |(\mathcal{P}_N \cap \mathcal{D}_{N|K}^-)\mathcal{I}_K/\mathcal{I}_K|$ die Gruppenordnung der relativ ambigen Hauptideale,
$p^c = |\ker(j_{N|K})| = (\mathcal{P}_N \cap \mathcal{I}_K : \mathcal{P}_K)$ die Ordnung des Kapitulationskerns.
Für die kanonischen Invarianten a, b, c besteht aufgrund der Isomorphien
$E_{N|K}/U_N^{1-\sigma} \simeq \mathcal{P}_N^G/\mathcal{P}_K \simeq \mathcal{P}_L^D/\mathcal{P}_\mathbb{Q} \times (\mathcal{P}_N \cap \mathcal{D}_{N|K}^-)\mathcal{I}_K/\mathcal{I}_K \times \ker(j_{N|K})$
die Beziehung $p^{a+b+c} = (\mathcal{P}_N^G : \mathcal{P}_K) = (E_{N|K} : U_N^{1-\sigma}) = |\mathrm{H}^{-1}(G, U_N)| = p^{1+u}$.

§ **16.** Bestimmung der p-**Klassenzahlen** $\mathrm{h}_p(L_1), \ldots, \mathrm{h}_p(L_{p+1})$ der $p+1$ nicht-galoisschen Teilkörper der N_i vom Absolutgrad p für einen quadratischen Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ mit p-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ vom Typ (p,p) aus der Ordnung und Klasse der metabelschen p-Gruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ im Fall von **maximaler** Klasse

Satz 16. (D. C. Mayer, 2005 für $p = 3$, 2009 für $p \geq 5$)

Es sei $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ mit $|\mathbb{G}| = p^n$, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = m-1$, $n = m \geq 3$.
Die Normierung der Erzeugenden und maximalen Normalteiler von $\mathbb{G}$ sei wie in Satz 13. Dann gilt:

1. $\mathbb{K}$ muss ein reell quadratischer Körper sein.
2. Die Hauptfaktorisierungstypen von $L_1, \ldots, L_{p+1}$ sind gegeben durch

$$L_1 \text{ ist vom Typ } \begin{cases} \alpha_1 & \text{wenn } m \equiv 1(2),\ [C_2, \mathbb{G}'] = 1, \\ \delta_1 & \text{wenn } m \equiv 0(2),\ [C_2, \mathbb{G}'] = 1, \\ \alpha_1 & \text{wenn } m \equiv 0(2),\ [C_2, \mathbb{G}'] = \mathbb{G}_{m-1},\ m \geq 6,\ p \geq 3, \\ \alpha_1 & \text{wenn } m \equiv 1(2),\ [C_2, \mathbb{G}'] = \mathbb{G}_{m-2},\ m \geq 7,\ p \geq 5, \end{cases}$$

L_i ist stets vom Typ α_1 für $2 \leq i \leq p+1$.

3. Die 3-Klassenzahlen von $L_1, \ldots, L_{p+1}$ sind gegeben durch

$$\mathrm{h}_p(L_1) = \begin{cases} p^{\frac{m-1}{2}} & \text{wenn } m \equiv 1(2),\ [C_2, \mathbb{G}'] = 1, \\ p^{\frac{m-2}{2}} & \text{wenn } m \equiv 0(2),\ [C_2, \mathbb{G}'] = 1, \\ p^{\frac{m-2}{2}} & \text{wenn } m \equiv 0(2),\ [C_2, \mathbb{G}'] = \mathbb{G}_{m-1},\ m \geq 6,\ p \geq 3, \\ p^{\frac{m-3}{2}} & \text{wenn } m \equiv 1(2),\ [C_2, \mathbb{G}'] = \mathbb{G}_{m-2},\ m \geq 7,\ p \geq 5, \end{cases}$$

$\mathrm{h}_p(L_i) = p$ für $2 \leq i \leq p+1$.

§ **17.** Bestimmung der **Ordnung und Klasse** der metabelschen p-Gruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ **aus den p-Klassenzahlen** $\mathrm{h}_p(L_1), \ldots, \mathrm{h}_p(L_{p+1})$ bei totaler Kapitulation in $N_2, \ldots, N_{p+1}$

Satz 17. (D. C. Mayer, 2005 für $p = 3$, 2009 für $p \geq 5$)

$\mathbb{K}$ sei ein reell quadratischer Grundkörper
mit p-Klassengruppe vom Typ (p, p) und
mit totaler Kapitulation in $N_2, \ldots, N_{p+1}$.
Die p-Klassenzahlen der nicht-galoisschen Teilkörper
L_i $(1 \leq i \leq p+1)$ vom Absolutgrad p
seien $\mathrm{h}_p(L_1) = p^u \geq \mathrm{h}_p(L_2) = \ldots = \mathrm{h}_p(L_{p+1}) = p$ mit $u \geq 1$.
Dann ist $\mathbb{G}$ von maximaler Klasse $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = m - 1$ und
die Ordnung $|\mathbb{G}| = p^m$ ist gegeben durch

1. *geraden* Exponenten $m = 2u + 2$ für *partielle* Kapitulation in N_1,
wobei dann $[\mathrm{C}_2, \mathbb{G}'] = 1$,

2. *geraden* Exponenten $m = 2u + 2$ für *totale* Kapitulation in N_1,
falls $[\mathrm{C}_2, \mathbb{G}'] = \mathbb{G}_{m-1}$,

[**3.** ungeraden Exponenten $m = 2u + 1$ für totale Kapitulation in N_1,
falls $[\mathrm{C}_2, \mathbb{G}'] = 1$.]

Exemplarische **Anwendungen** für $p = 3$:

a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{32\,009})$ mit $u = 1$ und Kapitulationsart **a.3** $(4, 0, 0, 0)$,
also $m = 2u + 2 = 4$, $\mathbb{G} \simeq \mathbb{G}_0^{(4)}\,(\,-1 \quad 0\,) \in \mathrm{CF}^{2a}(4)$

b) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{494\,236})$ mit $u = 2$ und Kapitulationsart **a.3** $(3, 0, 0, 0)$,
also $m = 2u + 2 = 6$, $\mathbb{G} \simeq \mathbb{G}_0^{(6)}\,(\,\pm 1 \quad 0\,) \in \mathrm{CF}^{2a}(6)$

c) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{62\,501})$ mit $u = 2$ und Kapitulationsart **a.1** $(0, 0, 0, 0)$,
also $m = 2u + 2 = 6$, $\mathbb{G} \simeq \mathbb{G}_1^{(6)}\,(\,0 \quad \pm 1\,) \in \mathrm{CF}^{2b}(6)$

§ 18. **Relationen** für die Erzeugenden x, y einer metabelschen 3-Gruppe $\mathbb{G} = \langle x, y \rangle$ mit $\mathbb{G}/\mathbb{G}'$ vom Typ $(3,3)$ von **nicht-maximaler** Klasse

Satz 18. (B. Nebelung, 1989)

$\mathbb{G}$ metabelsche 3-Gruppe mit $\mathbb{G}/\mathbb{G}'$ vom Typ $(3,3)$, $|\mathbb{G}| = 3^n$, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = m-1$, $4 \le m < n \le 2m-3$, $e = n-m+2 \ge 3$, $\mathbb{G} = \langle x, y \rangle$.

Erzeugende: $y \in C_s \setminus \mathbb{G}'$, $x \in \mathbb{G} \setminus C_s$, falls $s \le m-2$,
so dass $\mathbb{G}_3 = \langle \sigma_3, \tau_3, \mathbb{G}_4 \rangle$ mit $\sigma_3 = y^3$, $\tau_3 = x^3$.
Glieder der absteigenden Zentralreihe: Hauptkommutator $s_2 = t_2 = [y, x] \in \mathbb{G}_2$, höhere Kommutatoren $s_{i+1} = [s_i, x] \in \mathbb{G}_{i+1}$, $t_{i+1} = [t_i, y] \in \mathbb{G}_{i+1}$ für $i \ge 2$. $\sigma_{i+1} = [\sigma_i, x] \in \mathbb{G}_{i+1}$, $\tau_{i+1} = [\tau_i, y] \in \mathbb{G}_{i+1}$ für $i \ge 3$.

Relationen von **Nebelung** mit $-1 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho \le 1$:

1. Nilpotenzrelationen:
$$\sigma_i = 1 \text{ für } i \ge m,\ \tau_i = 1 \text{ für } i \ge e+2.$$
2. Vertauschungsrelationen:
$$[\sigma_i, y] = 1,\ [\tau_i, x] = 1 \text{ für } i \ge 3.$$
3. Relationen für dritte Potenzen:
$$\begin{gathered} s_i^3 s_{i+1}^3 s_{i+2} = 1,\ t_i^3 t_{i+1}^3 t_{i+2} = 1 \text{ für } i \ge 3, \\ \sigma_i^3 \sigma_{i+1}^3 \sigma_{i+2} = 1,\ \tau_i^3 \tau_{i+1}^3 \tau_{i+2} = 1 \text{ für } i \ge 3, \\ s_2^3 s_3^3 s_4 = \tau_4^{-1},\ t_2^3 t_3^3 t_4 = \sigma_4, \\ s_i^3 = \sigma_{i+2},\ t_i^3 = \tau_{i+2}^{-1} \text{ für } i \ge 3, \\ s_2^3 = t_2^3 = \sigma_4 \tau_4^{-1} \sigma_{m-1}^{-\rho\beta}. \end{gathered}$$
4. Verbindungsrelationen zwischen s_i, t_i und σ_i, τ_i:
$$\begin{gathered} s_i = \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1},\ t_i = \tau_i \tau_{i+1} \text{ für } i \ge 5, \\ s_4 \sigma_4 \sigma_5 = t_4 \tau_4^{-1} \tau_5^{-1} = s_2^{\mathrm{S}_3(x)+\mathrm{S}_3(y)-3} = \sigma_{m-1}^{\rho\beta}, \\ t_3^{-1} \tau_3 \tau_4 = \sigma_{m-1}^{\alpha} \sigma_{m-2}^{\rho\delta} \tau_e^{\beta},\ s_3 \sigma_3 \sigma_4 = \sigma_{m-1}^{\gamma} \sigma_{m-2}^{\rho\beta} \tau_e^{\delta}, \\ s_2^{XY} = s_3^{Y} = t_3^{X} = \sigma_{m-1}^{-\rho\delta}, \\ \tau_{e+1} = \sigma_{m-1}^{\rho}. \end{gathered}$$

Symbol für die Isomorphieklasse: $\mathbb{G} \simeq \mathbb{G}_\rho^{(m,n)} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{CBF}(m, n; 3)$.

§ **19.** Bestimmung der **symbolischen Ordnung** $\mathfrak{M} \lhd \mathbb{Z}[X,Y]$ des Hauptkommutators $s_2 = [y,x]$ einer metabelschen 3-Gruppe $\mathbb{G} = \langle x,y \rangle$ von **nicht-maximaler** Klasse aus Relationen für die Erzeugenden x, y

Satz 19. (D. C. Mayer, 2009)

$\mathbb{G}$ metabelsche 3-Gruppe mit $\mathbb{G}/\mathbb{G}'$ vom Typ $(3,3)$, $|\mathbb{G}| = 3^n$, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = m-1$, $4 \le m < n \le 2m-3$, $e = n-m+2 \ge 3$, $\mathbb{G} = \langle x,y \rangle$.

Erzeugende: $y \in C_s \setminus \mathbb{G}'$, $x \in \mathbb{G} \setminus C_s$, falls $s = e \le m-2$, so dass $\mathbb{G}_3 = \langle y^3, x^3, \mathbb{G}_4 \rangle$.

Die symbolische Ordnung von $s_2 = [y,x] \in \mathbb{G}_2$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} (X^{m-2}, XY, Y^{e-1}, \mathrm{S}_3(xy)) & \text{für } [C_s, \mathbb{G}_e] = 1, \\ (X^{m-2}, P_1, P_2, P_3) & \text{für } [C_s, \mathbb{G}_e] = \mathbb{G}_{m-1},\ m \ge 5, \end{cases}$$

wobei $P_1 = bX^{m-3} - \mathrm{S}_3(x) - \mathrm{S}_3(y) + 3$,
$P_2 = cX^{m-3} - Y^{e-1}$, $P_3 = dX^{m-3} - XY$ mit $-1 \le b,c,d \le 1$
und $X = x-1$, $Y = y-1$,
$\mathrm{S}_3(x) = x^2 + x + 1 = X^2 + 3X + 3$, $\mathrm{S}_3(y) = y^2 + y + 1 = Y^2 + 3Y + 3$,
$\mathrm{S}_3(xy) = 1 + xy + x^2y^2 = 3 + 3X + 3Y + X^2 + 5XY + Y^2 + 2X^2Y + 2XY^2 + X^2Y^2$.

Im Fall $[C_s, G_e] = 1$ ist $\mathfrak{M} =$
$\mathfrak{R}_{\alpha,\beta} = (X^\alpha, XY, Y^\beta, \mathrm{S}_3(xy))$ mit $\alpha = m-2$ und $\beta = e-1$.
Für $\beta = 2$, $e = 3$ ist $\mathfrak{R}_{\alpha,2} = \mathfrak{X}_\alpha = (X^\alpha, XY, Y^2, \mathrm{S}_3(x))$.
Für $\alpha = 2$, $m = 4$ ist $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{L}_2 = (X^2, XY, Y^2, 3)$.

Im Fall $[C_s, G_e] = G_{m-1}$ ist $\mathfrak{M} =$
$\mathfrak{S}_{\alpha,\beta} = (X^\alpha, bX^{\alpha-1} - \mathrm{S}_3(x) - \mathrm{S}_3(y) + 3, cX^{\alpha-1} - Y^{\beta-1}, dX^{\alpha-1} - XY)$ mit $\alpha = m-2$ und $\beta = e$.
Spezialfälle davon sind
$\mathfrak{T}_{\alpha,\beta} = (X^\alpha, X^{\alpha-1} \pm \mathrm{S}_3(xy), XY, Y^\beta)$,
$\mathfrak{V}_{\alpha,\beta} = (X^\alpha, \mathrm{S}_3(xy), X^{\alpha-1} \pm XY, Y^\beta)$,
$\mathfrak{Z}_\alpha = \mathfrak{T}_{\alpha,3}$,
$\mathfrak{Z}'_\alpha = \mathfrak{V}_{\alpha,3}$,
$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_3$,
$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}'_3$.

§ **20.** Bestimmung der 3-**Klassenzahlen** $\mathrm{h}_3(N_1),\ldots,\mathrm{h}_3(N_4)$
der vier unverzweigten zyklisch kubischen Erweiterungen
über einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$
mit 3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3,3)$
aus der Ordnung und Klasse
der metabelschen 3-Gruppe $\mathbb{G}=\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$
im Fall von **nicht-maximaler** Klasse

Satz 20. (D. C. Mayer, 2005)
$\mathbb{G}$ metabelsche 3-Gruppe mit $\mathbb{G}/\mathbb{G}'$ vom Typ $(3,3)$, $|\mathbb{G}|=3^n$, $\mathrm{cl}(\mathbb{G})=m-1$, $4\le m<n\le 2m-3$, $e=n-m+2\ge 3$, $\mathbb{G}=\langle x,y\rangle$.
Erzeugende: $y\in C_s\setminus\mathbb{G}'$, $x\in\mathbb{G}\setminus C_s$, falls $s\le m-2$, so dass $\mathbb{G}_3=\langle y^3,x^3,\mathbb{G}_4\rangle$.
Hauptkommutator: $s_2=[y,x]\in\mathbb{G}_2$.
Maximale Normalteiler $\mathbb{M}_i=\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|N_i)$ mit folgender Nummerierung:
$\mathbb{M}_1=\langle y,\mathbb{G}'\rangle(=C_s)$, $\mathbb{M}_2=\langle x,\mathbb{G}'\rangle$, $\mathbb{M}_3=\langle xy,\mathbb{G}'\rangle$, $\mathbb{M}_4=\langle xy^{-1},\mathbb{G}'\rangle$.

1. Die Kommutatorgruppen von $\mathbb{M}_1,\ldots,\mathbb{M}_4$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_1'&=\langle[s_2,y],T_4\rangle\\ \mathbb{M}_2'&=\langle[s_2,x],\Sigma_4\rangle\\ \mathbb{M}_3'&=\langle[s_2,xy],\mathbb{G}_4\rangle,\\ \mathbb{M}_4'&=\langle[s_2,xy^{-1}],\mathbb{G}_4\rangle,\end{aligned}$$

wobei $\Sigma_4=\langle y^{3X^i}\mid 4\le i\le m-1\rangle$, $T_4=\langle x^{3Y^i}\mid 4\le i\le e+1\rangle$ mit $X=x-1$, $Y=y-1$, $|\Sigma_4|=3^{m-4}$, $|T_4|=\begin{cases}3^{e-3}, & \text{falls } [C_s,\mathbb{G}_e]=1,\\ 3^{e-2}, & \text{falls } [C_s,\mathbb{G}_e]=\mathbb{G}_{m-1},\ m\ge 5.\end{cases}$

Die $\mathbb{M}_i$ sind stets nicht-abelsche Normalteiler von $\mathbb{G}$.

2. Für $\mathbb{G}=\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ sind die 3-Klassenzahlen von $N_1,\ldots,N_4$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathrm{h}_3(N_1)&=\begin{cases}3^{m-1}, & \text{falls } [C_s,\mathbb{G}_e]=1,\\ 3^{m-2}, & \text{falls } [C_s,\mathbb{G}_e]=\mathbb{G}_{m-1},\ m\ge 5,\end{cases}\\ \mathrm{h}_3(N_2)&=3^e,\\ \mathrm{h}_3(N_i)&=3^3 \text{ für } 3\le i\le 4.\end{aligned}$$

§ **21.** Bestimmung der **Ordnung und Klasse** der metabelschen 3-Gruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ **aus den** 3-**Klassenzahlen** $\mathrm{h}_3(L_1), \ldots, \mathrm{h}_3(L_4)$ bei **partieller Kapitulation** in $N_1, \ldots, N_4$

Satz 21. (D. C. Mayer, 2006)

$\mathbb{K}$ sei ein (reell oder komplex) quadratischer Grundkörper
mit 3-Klassengruppe vom Typ $(3, 3)$ und
mit partieller Kapitulation in $N_1, \ldots, N_4$.
Die 3-Klassenzahlen der nicht-galoisschen absolut kubischen Teilkörper
L_i $(1 \le i \le 4)$
seien $\mathrm{h}_3(L_1) = 3^u \ge \mathrm{h}_3(L_2) = 3^v \ge \mathrm{h}_3(L_3) = \mathrm{h}_3(L_4) = 3$ mit $u \ge v \ge 1$.
Dann ist $\mathbb{G}$ von nicht-maximaler Klasse $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = m - 1$,
die Invariante $e = n - m + 2$ hat den *ungeraden* Wert $2v + 1$ und
die Ordnung $|\mathbb{G}| = 3^n$ ist gegeben durch

1. *ungeraden* Exponenten $n = 2(u + v) + 1$, falls $[\mathrm{C}_s, \mathbb{G}_e] = 1$,
wobei dann $m = 2u + 2$,

2. *geraden* Exponenten $n = 2(u + v + 1)$, falls $[\mathrm{C}_s, \mathbb{G}_e] = \mathbb{G}_{m-1}$,
wobei dann $m = 2u + 3$.

Exemplarische **Anwendungen**:

a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-4\,027})$ mit $u = 1$, $v = 1$ und Kapitulationsart **D.10** $(2, 3, 3, 1)$,
also $e = 2v + 1 = 3$, $m = 2u + 2 = 4$, $n = 2(u + v) + 1 = 5$,
$\mathbb{G} \simeq \mathbb{G}_0^{(4,5)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{CBF}^{1a}(4, 5)$

b) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-9\,748})$ mit $u = 2$, $v = 1$ und Kapitulationsart **E.9** $(2, 2, 1, 4)$,
also $e = 2v + 1 = 3$, $m = 2u + 2 = 6$, $n = 2(u + v) + 1 = 7$,
$\mathbb{G} \simeq \mathbb{G}_0^{(6,7)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{CBF}^{2a}(6, 7)$

c) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-262\,744})$ mit $u = 3$, $v = 1$ und Kapitulationsart **E.14** $(2, 4, 4, 1)$,
also $e = 2v + 1 = 3$, $m = 2u + 2 = 8$, $n = 2(u + v) + 1 = 9$,
$\mathbb{G} \simeq \mathbb{G}_0^{(8,9)}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{CBF}^{2a}(8, 9)$

§ **22.** Nochmals erweitertes **Szenario:**

Der **dreistufige Turm** $\mathbb{K} < \mathbb{K}_1 \le \mathbb{K}_2 \le \mathbb{K}_3$
bis zum dritten Hilbertschen p-Klassenkörper $\mathbb{K}_3$
über einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$
mit p-Klassenrang $\varrho_p = \dim_{\mathbb{F}_p}[\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p] = 2$

$\mathbb{K}_3 = (\mathbb{K}_2)_1$ heißt **dritter Hilbertscher p-Klassenkörper** von $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}_3 \ne \mathbb{K}_2 \Longrightarrow$ Innerhalb von $\mathbb{K}_3$ gibt es
eine unverzweigte Erweiterung $F|\mathbb{K}_2$ vom Exponenten p,
sodass F Galois-Erweiterung von $\mathbb{K}$ mit Gruppe $H = \mathrm{Gal}(F|\mathbb{K})$ ist
und $H'' \le \mathrm{Z}(H)$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{K}_3 & & & & \\
| & & & & \\
F & & 1 = \mathrm{Gal}(F|F) & & \\
| & & | & & \\
\mathbb{K}_2 & & H'' = \mathrm{Gal}(F|\mathbb{K}_2) \le \mathrm{Z}(H) & & \\
| & & | & & \\
\mathbb{K}_1 & \longleftrightarrow & H' = \mathrm{Gal}(F|\mathbb{K}_1) & \longrightarrow & H'/H'' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_1) \simeq \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}_1) \\
| & & | & & \\
\mathbb{K} & & H = \mathrm{Gal}(F|\mathbb{K}) & \longrightarrow & H/H' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_1|\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})
\end{array}$$

Modifizierte aufsteigende **Zentralreihe** von H, gegenläufig nummeriert,
beginnend mit $\ell \ge 1$, der zunächst unbekannten Länge der Reihe:
$D_\ell = H''$, $D_i \le D_{i-1} \le H$ mit $D_{i-1}/D_i = \mathrm{Z}(H/D_i)$ für $\ell \ge i \ge 2$.

$$H'' = D_\ell < D_{\ell-1} < \ldots < D_2 < D_1 = H$$

Dann gilt $[H, D_j] \le D_{j+1}$ für $1 \le j \le \ell - 1$,
und daher $[H_i, D_j] \le D_{i+j}$ für $i, j \ge 1$, nach **Kaloujnine**,
für die Glieder H_i der (gewöhnlichen) absteigenden Zentralreihe von H.

§ **23.** Hinreichende Bedingungen für die **Zweistufigkeit**
des Turmes $\mathbb{K} < \mathbb{K}_1 \le \mathbb{K}_2 \le \mathbb{K}_3 \le \ldots$ der Hilbertschen p-Klassenkörper
über einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$
mit p-Klassenrang $\varrho_p = \dim_{\mathbb{F}_p}[\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p] = 2$

Satz 23. (J. R. Brink, 1984, für $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_2$; D. C. Mayer, 2006, für $\mathfrak{M} = \mathfrak{Y}_2$)
$F|\mathbb{K}_2$ sei erklärt wie in § 22.
Besitzt der Hauptkommutator $s = [y, x]$ der (zweistufig) metabelschen p-Gruppe $H/H'' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}) = \langle x, y\rangle$ die symbolische Ordnung $\mathfrak{M} = \mathfrak{Y}_2$ oder $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_2$, dann hat die modifizierte Zentralreihe von $H = \mathrm{Gal}(F|\mathbb{K})$ aus § 12 die Gestalt

$$\begin{array}{lllll} D_1 & > D_2 & > D_3 & > D_4 & \overset{(>)}{=} D_5 \\ = H & = H' = H_2 & & = H'' & = 1 \\ = \langle x, y\rangle & = \langle s, s^X, H''\rangle & = \langle s^X, H''\rangle & = \langle [s, s^X]\rangle & \end{array}$$

mit $[s, s^X] \in [H_2, D_3] \le D_{2+3} = 1$, falls $\mathfrak{M} = \mathfrak{Y}_2 = (X^2, Y, p)$, und

$$\begin{array}{lllll} D_1 & > D_2 & > D_3 & > D_4 & \overset{(>)}{=} D_5 \\ = H & = H' = H_2 & & = H'' & = 1 \\ = \langle x, y\rangle & = \langle s, s^X, s^Y, H''\rangle & = \langle s^X, s^Y, H''\rangle & = \langle [s, s^X], [s, s^Y], [s^X, s^Y]\rangle & \end{array}$$

mit $[s, s^X], [s, s^Y], [s^X, s^Y] \in [H_2, D_3] \le D_{2+3} = 1$,
falls $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_2 = (X^2, XY, Y^2, p)$.

In beiden Fällen ist die zweite abgeleitete Gruppe H'' trivial und
der p-Klassenkörperturm des Grundkörpers $\mathbb{K}$ endet mit $\mathbb{K}_2$.

Zusatz 23.1. (D. C. Mayer, 2006, für $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$)
Besitzt der Hauptkommutator $s = [y, x]$ der (zweistufig) metabelschen p-Gruppe $H/H'' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}) = \langle x, y\rangle$ die symbolische Ordnung $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} = \mathfrak{Y}_1 = (X, Y, p)$, dann ist $H'/H'' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_1) \simeq \mathbb{Z}[X, Y]/\mathfrak{L}$ zyklisch von der Ordnung p, also $H' = \mathrm{Gal}(F|\mathbb{K}_1)$ abelsch, und somit $H'' = \mathrm{Gal}(F|\mathbb{K}_2) = 1$.

§ 24. **Grenzen der Beweismethode** für die Zweistufigkeit

Die Beweismethode von Satz 23 liefert für symbolische Ordnungen $\mathfrak{M}$, die von $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{L}$ verschieden sind, bereits im Fall $p = 3$, also über einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$ mit 3-Klassenrang $\varrho_3 = \dim_{\mathbb{F}_3}[\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}_3} \mathbb{F}_3] = 2$ keine definitiven Aussagen über die Länge des 3-Klassenkörperturmes.

Besitzt der Hauptkommutator $s = [y, x]$ der (zweistufig) metabelschen 3-Gruppe $H/H'' \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}) = \langle x, y\rangle$ die symbolische Ordnung $\mathfrak{M} = \mathfrak{Y}_3$ oder $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}_3$, dann hat die modifizierte Zentralreihe von $H = \mathrm{Gal}(F|\mathbb{K})$ die Gestalt

$$
\begin{array}{llllll}
D_1 & > D_2 & > D_3 & > D_4 & > D_5 & \overset{>}{\neq} D_6 \\
= H & = H' = H_2 & & & = H'' & = 1 \\
= \langle x, y\rangle & = \langle s, s^X, H''\rangle & = \langle s^3, s^X, H''\rangle & = \langle s^3, s^{3X}, H''\rangle & = \langle [s, s^X]\rangle &
\end{array}
$$

mit $[s, s^X] \in [H_2, D_3] \le D_5 \neq 1$, falls $\mathfrak{M} = \mathfrak{Y}_3 = (X^3, Y, X^2 + 3X + 3)$, und

$$
\begin{array}{lllll}
D_1 > D_2 & > D_3 & > D_4 & > D_5 & \overset{>}{\neq} D_6 \\
\quad = H' = H_2 & & & = H'' & \\
\quad = \langle s, s^X, s^Y, H''\rangle & = \langle s^3, s^X, s^Y, H''\rangle & = \langle s^3, s^{3X}, s^Y, H''\rangle & = \langle [s, s^X]\rangle &
\end{array}
$$

wobei zunächst $D_5 = H'' = \langle [s, s^X], [s, s^Y], [s^X, s^Y]\rangle$
mit $[s, s^Y], [s^X, s^Y] \in [H_2, D_4] \le D_6 = 1$ aber $[s, s^X] \in [H_2, D_3] \le D_5 \neq 1$,
falls $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}_3 = (X^3, XY, Y^2, X^2 + 3X + 3)$.

Andere Herleitung von Satz 23. Der p-Klassenkörperturm von $\mathbb{K}$ ist höchstens zweistufig, wenn das vierte Glied $\mathbb{G}_4$ der absteigenden Zentralreihe von $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ trivial ist (F.-P. Heider und B. Schmithals, 1982). Die Sätze 11 und 12 zeigen dass der Nilpotenzindex einer metabelschen p-Gruppe $\mathbb{G}$ von maximaler Klasse durch $\alpha+2 = m = \mathrm{cl}(\mathbb{G})+1 \ge 3$ gegeben ist und die symbolische Ordnung des Hauptkommutators durch $\mathfrak{Y}_\alpha$. Also $\mathbb{G}_4 = 1$ für $\mathfrak{M} = \mathfrak{Y}_2$ oder $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} = \mathfrak{Y}_1$, aber $\mathbb{G}_4 \neq 1$ für $\mathfrak{M} = \mathfrak{Y}_3$. Bei einer metabelschen 3-Gruppe $\mathbb{G}$ von nicht-maximaler Klasse ist $\mathbb{G}_4 = 1$ für $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_2$ aber $\mathbb{G}_4 \neq 1$ für $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}_3$.

§ **25.** Die **symbolische Ordnung** des Hauptkommutators $s_2 = [y, x]$
für den **kleinen unteren zweistufigen Turm** $\mathbb{K} < \mathbb{K}_1 \leq (N_i)_1$
bis zum ersten Hilbertschen p-Klassenkörper $(N_i)_1$
einer festen unverzweigt zyklischen Erweiterung N_i $(1 \leq i \leq p+1)$
über einem algebraischen Zahlkörper $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$
mit p-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_p(\mathbb{K})$ vom Typ (p, p)

Satz 25. (D. C. Mayer, 2006)

Es sei $1 \leq i \leq p+1$ der fest gewählte Index von einer der $p+1$ unverzweigt zyklischen Erweiterungen $N_i|\mathbb{K}$ vom Relativgrad p.

1. Die symbolische Ordnung des Hauptkommutators $s_2 = [y, x]$ der metabelschen p-Gruppe $\Gamma_i = \mathrm{Gal}((N_i)_1|\mathbb{K}) = \langle x, y \rangle$ ist eines der Ideale $\mathfrak{Y}_\alpha = (X^\alpha, Y, \mathrm{S}_p(x))$ mit $\alpha \geq 0$.
2. Γ_i ist von der Ordnung $|\Gamma_i| = p^m$ und von der Klasse $\mathrm{cl}(\Gamma_i) = m - 1$ mit $m = \alpha + 2 \geq 2$.
   Γ_i ist also eine metabelsche p-Gruppe von maximaler Klasse.
3. Die Struktur des abelschen maximalen Normalteilers $\mathbb{A}_i$ von Γ_i ist die einer fast homogenen abelschen p-Gruppe $\mathrm{A}(p, m-1)$, falls $m \geq p+2$.

Hat $m - 1$ die eindeutige Darstellung $m - 1 = q(p-1) + r$ mit $q \geq 1$ und $0 \leq r \leq p-2$, dann ist $\mathrm{A}(p, m-1)$ die abelsche Gruppe vom Typ

$$(\underbrace{p^{q+1}, \ldots, p^{q+1}}_{r \text{ mal}}, \underbrace{p^q, \ldots, p^q}_{(p-1-r) \text{ mal}})$$

§ A.1.0. Statistik der komplex quadratischen Körper mit verschiedenen 3-Klassenrängen ϱ

Es gibt **303 968** komplex quadratische Körper $\mathbb{K}$
mit Diskriminante $-10^6 < d(\mathbb{K}) < 0$

Sie besitzen 3-Klassenränge $\varrho = 0, 1, 2$, also
entweder **triviale** oder **zyklische** oder **bizyklische**
3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}) = \mathrm{Syl}_p\mathrm{Cl}(\mathbb{K})$

ϱ	Anzahl	Prozent
0	182 323	60, 0
1	118 455	39, 0
2	3 190	1, 0

§ A.1.1. Statistik der komplex quadratischen Körper mit 3-Klassenrang $\varrho = 1$

Es gibt **118 455** komplex quadratische Körper $\mathbb{K}$
mit Diskriminante $-10^6 < d(\mathbb{K}) < 0$
und 3-Klassenrang $\varrho = 1$, also mit **zyklischer**
3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ (3^e) $(e \geq 1)$

Gauss und Scholz nennen diese Diskriminanten
triadisch regulär.

e	$\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$	Anzahl	Prozent
1	(3)	80 115	67,6
2	(9)	26 458	22,3
3	(27)	8 974	7,6
4	(81)	2 472	2,1
5	(243)	393	0,3
6	(729)	43	0,0

§ A.1.2. Statistik der komplex quadratischen Körper mit 3-Klassenrang $\varrho = 2$

Es gibt **3 190** komplex quadratische Körper $\mathbb{K}$
mit Diskriminante $-10^6 < d(\mathbb{K}) < 0$
und 3-Klassenrang $\varrho = 2$, also mit **bizyklischer**
3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3^u, 3^v)$ $(u, v \geq 1)$

Gauss und Scholz nennen diese Diskriminanten
triadisch irregulär.

(u, v)	$\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$	Anzahl	Prozent
$(1, 1)$	$(3, 3)$	2 020	$63, 3$
$(2, 1)$	$(9, 3)$	875	$27, 4$
$(3, 1)$	$(27, 3)$	236	$7, 4$
$(4, 1)$	$(81, 3)$	34	$1, 1$
$(5, 1)$	$(243, 3)$	5	$0, 2$
$(2, 2)$	$(9, 9)$	15	$0, 5$
$(3, 2)$	$(27, 9)$	5	$0, 2$

§ **A.1.3.** Absteigende Zentralreihe der relativen Galoisgruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ des zweiten Hilbertschen 3-Klassenkörpers $\mathbb{K}_2$ über dem **komplex** quadratischen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-4\,027})$ mit 3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3,3)$

Isomorphieklasse von $\mathbb{G}$: $\mathbb{G}_0^{(4,5)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{CBF}^{1a}(4,5)$

- **Ordnung** von $\mathbb{G}$: $|\mathbb{G}| = 3^5 = 243$
- Nilpotenz-**Klasse** von $\mathbb{G}$: **fast maximale** Klasse, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = 3$
- Bizyklisches Zentrum: $Z(\mathbb{G}) = \mathbb{G}_3$ vom Typ $(3,3)$
- Keine maximale charakteristische Untergruppe: $\mathbb{G}' = C_1 = C_2 < C_3 = \mathbb{G}$ mit $[C_3, \mathbb{G}_3] = 1 \leq \mathbb{G}_5$
- Natürlicher **Kapitulationstyp** von $\mathbb{K}$: $(2,3,3,1) \sim (1,1,2,3)$, also **D.10**
- **Symbolische Ordnung** des Kommutators $s_2 = [y,x]$ von $\mathbb{G} = \langle x, y\rangle$: $\mathfrak{L}_2 = (X^2, XY, Y^2, 3) < \mathbb{Z}[X,Y]$ mit $X = x-1$, $Y = y-1$
- **Struktur** von $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}_1) \simeq \mathbb{G}' \simeq \mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{L}_2$: vom Typ $(3,3,3)$
- $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}_2) = 1$, also 2-**stufiger Turm** von 3-Klassenkörpern über $\mathbb{K}$

triviale Untergruppe		$\mathbb{G}_4 = 1 = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|\mathbb{K}_2)$ $\|\|$ $\mathbb{G}_3 = \langle y^3, x^3\rangle$ $\|$		
Kommutator−gruppe		$\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}' = \langle s_2, y^3, x^3\rangle$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|\mathbb{K}_1)$		
maximale Normalteiler	$\mathbb{M}_1$ $\mathbb{M}_2$	$= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|N_i)_{(1\leq i\leq 4)}$	$\mathbb{M}_3$ $\mathbb{M}_4$	
metabelsche 3−Gruppe		$\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} = \langle x, y\rangle$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\|\mathbb{K})$ $\uparrow$ relative Galoisgruppe		

§ **A.1.4.** Absteigende Zentralreihe der relativen Galoisgruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$
des zweiten Hilbertschen 3-Klassenkörpers $\mathbb{K}_2$
über dem **komplex** quadratischen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-9\,748})$
mit 3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3, 3)$

Isomorphieklasse von $\mathbb{G}$: $\mathbb{G}_0^{(6,7)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{CBF}^{2a}(6,7)$

- **Ordnung** von $\mathbb{G}$: $|\mathbb{G}| = 3^7 = 2\,187$
- Nilpotenz-**Klasse** von $\mathbb{G}$: **fast maximale** Klasse, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = 5$
- Bizyklisches Zentrum: $Z(\mathbb{G}) = \langle y^{3X^2}, x^3\rangle$ vom Typ $(3, 3)$
- Maximale charakteristische Untergruppe:
  $\mathbb{G}' = C_1 = C_2 < \mathbb{M}_1 = \langle y, \mathbb{G}'\rangle = C_3 = C_4 < C_5 = \mathbb{G}$ mit $[C_3, \mathbb{G}_3] = 1 \leq \mathbb{G}_5$
- Natürlicher **Kapitulationstyp** von $\mathbb{K}$: $(2, 2, 1, 4) \sim (1, 2, 1, 3)$, also **E.9**
- **Symbolische Ordnung** des Kommutators $s_2 = [y, x]$ von $\mathbb{G} = \langle x, y\rangle$:
  $\mathfrak{X}_4 = (X^4, XY, Y^2, \mathrm{S}_3(x))$, $X = x - 1$, $Y = y - 1$, $\mathrm{S}_3(x) = X^2 + 3X + 3$
- **Struktur** von $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}_1) \simeq \mathbb{G}' \simeq \mathbb{Z}[X, Y]/\mathfrak{X}_4$: vom Typ $(9, 9, 3)$

triviale Untergruppe — $\mathbb{G}_6 = 1 = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_2)$

$\mathbb{G}_5 = \langle y^{3X^2}\rangle$

$\mathbb{G}_4 = \langle y^{3X}, y^{3X^2}\rangle$

$\mathbb{G}_3 = \langle y^3, y^{3X}, x^3\rangle$

Kommutator−gruppe — $\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}' = \langle s_2, y^3, x^3\rangle$
$= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_1)$

maximale Normalteiler — $\mathbb{M}_1 = C_3$ $\quad \mathbb{M}_2 \quad \mathbb{M}_3 \quad \mathbb{M}_4$
$= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|N_i)_{(1\leq i\leq 4)}$

metabelsche 3−Gruppe — $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} = \langle x, y\rangle$
$= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$
$\uparrow$
relative Galoisgruppe

§ **A.1.5.** Absteigende Zentralreihe der relativen Galoisgruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ des zweiten Hilbertschen 3-Klassenkörpers $\mathbb{K}_2$ über dem **komplex** quadratischen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-262\,744})$ mit 3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3,3)$

Isomorphieklasse von $\mathbb{G}$: $\mathbb{G}_0^{(8,9)}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{CBF}^{2a}(8,9)$

- **Ordnung** von $\mathbb{G}$: $|\mathbb{G}| = 3^9 = 19\,683$
- Nilpotenz-**Klasse** von $\mathbb{G}$: **fast maximale** Klasse, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = 7$
- Bizyklisches Zentrum: $Z(\mathbb{G}) = \langle y^{3X^4}, x^3 \rangle$ vom Typ $(3,3)$
- Maximale charakteristische Untergruppe:
  $\mathbb{G}' = C_1 = C_2 < \mathbb{M}_1 = \langle y, \mathbb{G}' \rangle = C_3 = \ldots = C_6 < C_7 = \mathbb{G}$, $[C_3, \mathbb{G}_3] = 1 \leq \mathbb{G}_5$
- Natürlicher **Kapitulationstyp** von $\mathbb{K}$: $(2,4,4,1) \sim (2,3,1,1)$, also **E.14**
- **Symbolische Ordnung** des Kommutators $s_2 = [y,x]$ von $\mathbb{G} = \langle x, y \rangle$:
  $\mathfrak{X}_6 = (X^6, XY, Y^2, \mathrm{S}_3(x))$, $X = x-1$, $Y = y-1$, $\mathrm{S}_3(x) = X^2 + 3X + 3$
- **Struktur** von $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}_1) \simeq \mathbb{G}' \simeq \mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{X}_6$: vom Typ $(27,27,3)$

triviale Untergruppe $\qquad \mathbb{G}_8 = 1 = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_2)$

$|$

$\mathbb{G}_7 = \langle y^{3X^4} \rangle$

$|$

$\mathbb{G}_6 = \langle y^{3X^3}, y^{3X^4} \rangle$

$|$

$\mathbb{G}_5 = \langle y^{3X^2}, y^{3X^3} \rangle$

$|$

$\mathbb{G}_4 = \langle y^{3X}, y^{3X^2} \rangle$

$||$

$\mathbb{G}_3 = \langle y^3, y^{3X}, x^3 \rangle$

$|$

Kommutator−gruppe $\qquad \mathbb{G}_2 = \mathbb{G}' = \langle s_2, y^3, x^3 \rangle = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_1)$

maximale Normalteiler $\qquad \mathbb{M}_1 = C_3 \quad \mathbb{M}_2 \quad \mathbb{M}_3 \quad \mathbb{M}_4 \qquad = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|N_i)_{(1\leq i\leq 4)}$

metabelsche 3−Gruppe $\qquad \mathbb{G}_1 = \mathbb{G} = \langle x, y \rangle = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$

$\uparrow$

relative Galoisgruppe

§ A.2.0. Statistik der reell quadratischen Körper mit verschiedenen 3-Klassenrängen ϱ

Es gibt **303 957** reell quadratische Körper $\mathbb{K}$
mit Diskriminante $0 < d(\mathbb{K}) < 10^6$

Sie besitzen 3-Klassenränge $\varrho = 0, 1, 2$, also
entweder **triviale** oder **zyklische** oder **bizyklische**
3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}) = \mathrm{Syl}_p\mathrm{Cl}(\mathbb{K})$

ϱ	Anzahl	Prozent
0	265 883	87,47
1	37 913	12,47
2	161	0,05

§ A.2.1. Statistik der reell quadratischen Körper mit 3-Klassenrang $\varrho = 1$

Es gibt **37 913** reell quadratische Körper $\mathbb{K}$
mit Diskriminante $0 < d(\mathbb{K}) < 10^6$
und 3-Klassenrang $\varrho = 1$, also mit **zyklischer**
3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ (3^e) $(e \geq 1)$

Gauss und Scholz nennen diese Diskriminanten
triadisch regulär.

e	$\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$	Anzahl	Prozent
1	(3)	34 485	91,0
2	(9)	3 221	8,5
3	(27)	205	0,5
4	(81)	2	0,0

§ A.2.2. Statistik der reell quadratischen Körper mit 3-Klassenrang $\varrho = 2$

Es gibt **161** reell quadratische Körper $\mathbb{K}$
mit Diskriminante $0 < d(\mathbb{K}) < 10^6$
und 3-Klassenrang $\varrho = 2$, also mit **bizyklischer**
3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3^u, 3^v)$ $(u, v \geq 1)$

Gauss und Scholz nennen diese Diskriminanten
triadisch irregulär.

(u, v)	$\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$	Anzahl	Prozent
$(1, 1)$	$(3, 3)$	149	$92,5$
$(2, 1)$	$(9, 3)$	12	$7,5$

§ **A.2.3.** Absteigende Zentralreihe der relativen Galoisgruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$
des zweiten Hilbertschen 3-Klassenkörpers $\mathbb{K}_2$
über dem **reell** quadratischen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{32\,009})$
mit 3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3,3)$

Isomorphieklasse von $\mathbb{G}$: $\mathbb{G}_0^{(4)}(\,-1 \quad 0\,) \in \mathrm{CBF}^{2a}(4,4) = \mathrm{CF}^{2a}(4)$

- **Ordnung** von $\mathbb{G}$: $|\mathbb{G}| = 3^4 = 81$
- Nilpotenz-**Klasse** von $\mathbb{G}$: **maximale** Klasse, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = 3$
- Zyklisches Zentrum: $Z(\mathbb{G}) = \mathbb{G}_3$ vom Typ (3)
- Maximale charakteristische Untergruppe:
  $\mathbb{G}' = C_1 < \mathbb{M}_1 = \langle y, \mathbb{G}' \rangle = C_2 < C_3 = \mathbb{G}$ mit $[C_2, \mathbb{G}'] = 1 \le \mathbb{G}_4$
- Natürlicher **Kapitulationstyp** von $\mathbb{K}$: $(4,0,0,0) \sim (2,0,0,0)$, also **a.3**
- **Symbolische Ordnung** des Kommutators $s_2 = [y,x]$ von $\mathbb{G} = \langle x, y \rangle$:
  $\mathfrak{Y}_2 = (X^2, Y, 3) < \mathbb{Z}[X,Y]$ mit $X = x-1$, $Y = y-1$
- **Struktur** von $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}_1) \simeq \mathbb{G}' \simeq \mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{Y}_2$: vom Typ $(3,3)$
- $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}_2) = 1$, also 2-**stufiger Turm** von 3-Klassenkörpern über $\mathbb{K}$

triviale Untergruppe		$\mathbb{G}_4 = 1 = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\vert\mathbb{K}_2)$
		$\mathbb{G}_3 = \langle s_2^X \rangle$
Kommutator−gruppe		$\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}' = \langle s_2, s_2^X \rangle$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\vert\mathbb{K}_1)$
maximale Normalteiler	$\mathbb{M}_1 = C_2$, $\mathbb{M}_2$, $\mathbb{M}_3$, $\mathbb{M}_4$	$= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\vert N_i)_{(1\le i\le 4)}$
metabelsche 3−Gruppe		$\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} = \langle x, y \rangle$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\vert\mathbb{K})$
		$\uparrow$ relative Galoisgruppe

§ **A.2.4.** Absteigende Zentralreihe der relativen Galoisgruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$ des zweiten Hilbertschen 3-Klassenkörpers $\mathbb{K}_2$ über dem **reell** quadratischen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{62\,501})$ mit 3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3,3)$

Isomorphieklasse von $\mathbb{G}$: $\mathbb{G}_1^{(6)}(\,0 \quad \pm 1\,) \in \mathrm{CBF}^{2b}(6,6) = \mathrm{CF}^{2b}(6)$

- **Ordnung** von $\mathbb{G}$: $|\mathbb{G}| = 3^6 = 729$
- Nilpotenz-**Klasse** von $\mathbb{G}$: **maximale** Klasse, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = 5$
- Zyklisches Zentrum: $Z(\mathbb{G}) = \mathbb{G}_5$ vom Typ (3)
- Maximale charakteristische Untergruppe:
  $\mathbb{G}' = C_1 < \mathbb{M}_1 = \langle y, \mathbb{G}' \rangle = C_2 = C_3 = C_4 < C_5 = \mathbb{G}$ mit $[C_2, \mathbb{G}'] = \mathbb{G}_5 \leq \mathbb{G}_4$
- Natürlicher **Kapitulationstyp** von $\mathbb{K}$: $(0,0,0,0)$, also **a.1**
- **Symbolische Ordnung** des Kommutators $s_2 = [y,x]$ von $\mathbb{G} = \langle x, y \rangle$:
  $\mathfrak{Y}_4' = (X^4, XY, X^3 - Y, \mathrm{S}_3(x))$, $X = x - 1$, $Y = y - 1$, $\mathrm{S}_3(x) = X^2 + 3X + 3$
- **Struktur** von $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}_1) \simeq \mathbb{G}' \simeq \mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{Y}_4'$: vom Typ $(9,9)$

triviale Untergruppe		$\mathbb{G}_6 = 1 = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\vert\mathbb{K}_2)$		
		$\vert$		
		$\mathbb{G}_5 = \langle s_2^{X^3} \rangle$		
		$\vert$		
		$\mathbb{G}_4 = \langle s_2^{X^2}, s_2^{X^3} \rangle$		
		$\vert$		
		$\mathbb{G}_3 = \langle s_2^{X}, s_2^{X^2} \rangle$		
		$\vert$		
Kommutator−gruppe		$\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}' = \langle s_2, s_2^{X} \rangle$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\vert\mathbb{K}_1)$		
maximale Normalteiler	$\mathbb{M}_1$ $= C_2$	$\mathbb{M}_2$	$= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\vert N_i)_{(1 \leq i \leq 4)}$	$\mathbb{M}_3$ $\mathbb{M}_4$
metabelsche 3−Gruppe		$\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} = \langle x, y \rangle$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2\vert\mathbb{K})$		
		$\uparrow$		
		relative Galoisgruppe		

§ **A.2.5.** Absteigende Zentralreihe der relativen Galoisgruppe $\mathbb{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$
des zweiten Hilbertschen 3-Klassenkörpers $\mathbb{K}_2$
über dem **reell** quadratischen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{494\,236})$
mit 3-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K})$ vom Typ $(3,3)$

Isomorphieklasse von $\mathbb{G}$: $\mathbb{G}_0^{(6)}(\pm 1 \quad 0) \in \mathrm{CBF}^{2a}(6,6) = \mathrm{CF}^{2a}(6)$

- **Ordnung** von $\mathbb{G}$: $|\mathbb{G}| = 3^6 = 729$
- Nilpotenz-**Klasse** von $\mathbb{G}$: **maximale** Klasse, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}) = 5$
- Zyklisches Zentrum: $Z(\mathbb{G}) = \mathbb{G}_5$ vom Typ (3)
- Maximale charakteristische Untergruppe:
  $\mathbb{G}' = C_1 < \mathbb{M}_1 = \langle y, \mathbb{G}' \rangle = C_2 = C_3 = C_4 < C_5 = \mathbb{G}$ mit $[C_2, \mathbb{G}'] = 1 \le \mathbb{G}_4$
- Natürlicher **Kapitulationstyp** von $\mathbb{K}$: $(3,0,0,0) \sim (2,0,0,0)$, also **a.3**
- **Symbolische Ordnung** des Kommutators $s_2 = [y,x]$ von $\mathbb{G} = \langle x, y \rangle$:
  $\mathfrak{Y}_4 = (X^4, Y, \mathrm{S}_3(x))$, $X = x - 1$, $Y = y - 1$, $\mathrm{S}_3(x) = X^2 + 3X + 3$
- **Struktur** von $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{K}_1) \simeq \mathbb{G}' \simeq \mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{Y}_4$: vom Typ $(9,9)$

triviale Untergruppe — $\mathbb{G}_6 = 1 = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_2)$

$\mathbb{G}_5 = \langle s_2^{X^3} \rangle$

$\mathbb{G}_4 = \langle s_2^{X^2}, s_2^{X^3} \rangle$

$\mathbb{G}_3 = \langle s_2^{X}, s_2^{X^2} \rangle$

Kommutator−gruppe — $\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}' = \langle s_2, s_2^{X} \rangle = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K}_1)$

maximale Normalteiler — $\mathbb{M}_1 = C_2$, $\mathbb{M}_2$, $\mathbb{M}_3$, $\mathbb{M}_4$ $= \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|N_i)_{(1 \le i \le 4)}$

metabelsche 3−Gruppe — $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} = \langle x, y \rangle = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_2|\mathbb{K})$

$\uparrow$

relative Galoisgruppe